

# DIGITALES ARCHIV

ZBW – Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft  
ZBW – Leibniz Information Centre for Economics

Bressan, Rafael Felipe; Souza, Daniel Augusto; Amarante, Adriano de

## Article

# Aplicando a teoria do valor extremo ao cálculo de risco de índices setoriais da B3

Revista brasileira de economia de empresas

## Provided in Cooperation with:

Universidade Católica de Brasília (UCB), Brasília

*Reference:* Bressan, Rafael Felipe/Souza, Daniel Augusto et. al. (2021). Aplicando a teoria do valor extremo ao cálculo de risco de índices setoriais da B3. In: Revista brasileira de economia de empresas 21 (1), S. 65 - 86.  
<https://portalrevistas.ucb.br/index.php/rbee/article/download/10378/7459>.

This Version is available at:

<http://hdl.handle.net/11159/13145>

## Kontakt/Contact

ZBW – Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft/Leibniz Information Centre for Economics  
Düsternbrooker Weg 120  
24105 Kiel (Germany)  
E-Mail: [rights\[at\]zbw.eu](mailto:rights[at]zbw.eu)  
<https://www.zbw.eu/econis-archiv/>

## Standard-Nutzungsbedingungen:

Dieses Dokument darf zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen. Sofern für das Dokument eine Open-Content-Lizenz verwendet wurde, so gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

<https://zbw.eu/econis-archiv/termsfuse>

## Terms of use:

*This document may be saved and copied for your personal and scholarly purposes. You are not to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public. If the document is made available under a Creative Commons Licence you may exercise further usage rights as specified in the licence.*

# Aplicando a teoria do valor extremo ao cálculo de risco de índices setoriais da B3<sup>1</sup>

**Resumo:** Este artigo faz um comparativo entre dois modelos univariados para estimação de Valor em Risco (VaR) para seis índices de ações calculados pela B3. Os modelos testados são do tipo condicional com um período fora da amostra, aplicados a mais de 3 anos de observações diárias. A partir de dois procedimentos de avaliação, cobertura incondicional e teste de independência de violações ao Valor em Risco, os melhores resultados são apresentados pelo modelo que une Teoria do Valor Extremo (EVT) e modelagem condicional de variâncias heterocedásticas, ao qual insere o regime variável nas volatilidades das perdas, assim como excesso de curtose. Os principais resultados foram a constatação da superioridade do modelo EVT condicional sobre o *Riskmetrics* quando da análise da amostra composta por retornos diários dos índices setoriais da B3 e a comprovação da hipótese de que o setor de empresas financeiras (IFIN) apresenta um menor número de violações à cobertura do EVT condicional.

**Palavras-chave:** Valor em Risco; Teoria do valor extremos; picos acima de um limiar; EVT condicional; modelos GARCH.

**Abstract:** *This article makes a comparison between two univariate models of Value-at-Risk (VaR) estimation for six stock indices calculated by B3. The models tested are of the conditional type and, an out-of-sample period with more than 3 years of daily observations is used. Based on two evaluation procedures, unconditional coverage and independence test of value-at-risk violations, the best results was presented by the model that links the Extreme Value Theory (EVT) and conditional modeling of heteroskedastic variances, which takes into account the variable regime in losses volatilities as well as, excess of kurtosis. The main results were the confirmation of the superiority of the conditional EVT model over Riskmetrics when analyzing the sample made up of daily returns from the B3 sector indexes and proving the hypothesis that the financial companies sector (IFIN) presents fewer violations to the coverage of the Conditional EVT.*

**Keywords:** *Value-at-Risk; Extreme value theory; peaks over threshold; conditional EVT; GARCH models.*

**Classificação JEL:** C22; G10; G21.

<sup>1</sup> Agradecemos a Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina – FAPESC pelo apoio financeiro ao Grupo de Pesquisa em Economia Aplicada – GEA ao qual foi possível desenvolver este trabalho e a Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC pelo suporte e estrutura física no desenvolvimento desta e de outras pesquisas na área de finanças. As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem, necessariamente, a visão da Receita Federal do Brasil ou da Universidade do Estado de Santa Catarina.

Rafael Bressan<sup>2</sup>

Daniel Augusto de Souza<sup>3</sup>

Adriano de Amarante<sup>4</sup>

<sup>2</sup> Receita Federal do Brasil  
E-mail: rfbressan@gmail.com.

<sup>3</sup> Universidade do Estado de Santa Catarina  
E-mail: desouza.esag@gmail.com.

<sup>4</sup> Universidade do Estado de Santa Catarina  
E-mail: diamarante0@gmail.com.

## 1. Introdução

Uma classificação comum dos riscos encontrada no mercado financeiro baseia-se na fonte da incerteza subjacente. Muitas vezes, define-se o risco de um ativo financeiro como o grau de variabilidade dos retornos líquidos futuros. Essa incerteza sobre a rentabilidade esperada assume muitas formas, razão pela qual a maioria dos participantes nos mercados financeiros está sujeita a uma variedade de riscos. No setor financeiro, o tipo de risco mais conhecido é provavelmente o *risco de mercado*, o risco de mudança no valor de uma posição financeira de um portfólio devido a mudanças no valor subjacente dos componentes que essa posição depende, tais como preços de ações e títulos, taxas de câmbio, preços de *commodities*, etc.

Estimar o risco de mercado dos portfólios de investimento é uma busca constante dos investidores bem como por parte dos reguladores do Sistema Financeiro Nacional. No âmbito internacional, Instituições financeiras – IF, são obrigadas a provisionar um percentual de seu capital afim de suportar a volatilidade do mercado, e assim, minimizar o seu risco de insolvência tendo como base as legislações locais e princípios de Basileia (*Basel Committee on Banking Supervision* - BCBS do Banco de Compensações Internacionais - BIS).

A alta volatilidade dos retornos dos ativos financeiros observada em séries históricas é uma característica inerente. Tal volatilidade não segue uma distribuição normal e nem é constante ao longo do tempo. Perdas extremas são frequentes e não devem ser ignoradas ou tratadas como *outliers*, neste artigo são observadas com mais atenção as perdas de magnitude anormais, as quais impactam nos portfólios dos investidores e chamam atenção dos reguladores do mercado financeiro.

Diversos autores se interessam em entender este fenômeno por meio de estudos teóricos e empíricos com o objetivo de entender o mecanismo do comportamento dos retornos dos ativos ao longo do tempo, bem como modelar de forma adequada as caudas das distribuições dos retornos extremos, principalmente as perdas consideradas anormalmente grandes.

Como resultados práticos dos estudos na área, pode-se citar a exigência de um capital regulatório como uma das propostas do Acordo de Basileia I, o qual instituiu o conceito de capital próprio mínimo com o objetivo de proteção tanto da Instituição Financeira quanto dos próprios Sistemas Financeiros Nacionais contra o comportamento volátil de ativos de risco. Pode-se destacar também a obrigatoriedade dos signatários do acordo de Basileia em estimar o Valor em Risco (RISKMETRICS, 1995) para dimensionar a exigência de capital para as instituições financeiras. O acordo de Basileia teve mais duas versões: Basileia II (2004) e Basileia III (2010) todos com o foco em reduzir as práticas que elevam o risco financeiro causado pela incorreta avaliação de ativos ou pela excessiva alavancagem por parte dos bancos.

Junto com o VaR, outra metodologia para a mensuração do risco é o *Expected Shortfall* (ES). Enquanto o VaR quantifica o valor máximo de perda para uma carteira de ativos, sob condições normais de mercado, durante um determinado período de tempo e com um certo nível de confiança (quantil alto  $\alpha$ ), o ES quantifica o valor esperado da perda, dado que ocorreu uma violação do VaR para o mesmo período de tempo e nível de confiança (DEGIANNAKIS et al., 2013).

A principal crítica à metodologia de cálculo do VaR é o pressuposto de que os retornos dos ativos frequentemente seguem uma distribuição normal. No entanto, empiricamente pode-se constatar que as distribuições dos retornos apresentam “caudas mais longas ou pesadas” que das distribuições normais, o que causa um problema de imprecisão na estimativa de risco de perda excessiva.

Explorando essa lacuna de precisão na estimação do risco causada pelo referido

pressuposto, alguns estudos surgiram na tentativa de aperfeiçoar o VaR, como, por exemplo, a aplicação da Teoria dos Valores Extremos - EVT para modelar as distribuições de retornos com caudas longas. Por esta característica, consegue-se modelar eventos que se distanciam muito da tendência central, média ou mediana, por exemplo. Esse comportamento assintótico se ajusta bem para fatos estilizados sobre os retornos de ativos financeiros.

Na prática, a EVT parte do pressuposto de que os eventos extremos ou raros têm muito mais probabilidade de ocorrer do que seria previsto pela distribuição normal simétrica de cauda mais curta, o que torna os números do VaR baseados em normalidade em medidas inadequadas do risco real segundo Mörgel & Auer (2018).

Além das importantes comparações entre modelos de avaliação de risco encontradas em diversos artigos científicos na área de finanças descritas nesse artigo, nos motiva e justifica elaborar essa pesquisa o fato de que a bolsa de valores do Brasil B3 (Brasil, Bolsa, Balcão) apresenta duas características marcantes: a primeira é que considerando a capitalização de mercado em dólares, a bolsa de valores brasileira é a maior da América Latina e quarta maior das Américas, ficando atrás das Bolsas de Nova York, Nasdaq e Toronto, de acordo com levantamentos de duas empresas financeiras brasileiras, a Bússola do Investidor (2018) e Parmais (2019). E, a segunda característica é que a B3 é a única bolsa de valores que negocia ações atualmente no Brasil, importante país emergente.

A primeira característica elencada justifica este estudo pela importância desse mercado em relação ao seu tamanho, quando comparado aos demais mercados da região. Por outro lado, a segunda característica ressalta o fato de que há pouca cobertura na literatura internacional, dos mercados financeiros emergentes, principalmente quando o tema são os modelos de risco financeiro.

São fartos os estudos sobre diversos temas aderentes aos mercados financeiros baseados em dados advindos da América do Norte, Europa e China/Japão, ao passo que são pouco pesquisados os mesmos casos em regiões onde encontram-se muitos países emergentes, tais como, América Latina, Oriente Médio e África, o que poderá ser constatado no referencial teórico aqui desenvolvido.

Em função disso, nos motivamos em comparar as metodologias de risco EVT/*Riskmetrics* em uma seleção de indicadores setoriais cobertos pela bolsa brasileira a fim de testar os referidos modelos e ao mesmo tempo, verificar qual é a diferença de risco entre os índices setoriais de ações da B3.

Os setores cobertos pelos índices da B3 analisados nesse artigo são: Financeiro (IFNC), Consumo (ICON), Industrial (INDX) e Materiais (IMAT), Governança Corporativa (IGCX) e, além desses, o próprio índice Bovespa (IBOV) da B3.<sup>5</sup>

Considerando os temas abordados nesse artigo, podemos enunciar duas hipóteses a serem investigadas no artigo.

i) Aplicado aos índices setoriais da B3, o modelo EVT condicional seria superior ao *Riskmetrics* quando avaliamos o percentual de violações aos limites de cobertura estabelecidos.

ii) Em se comprovando a primeira hipótese, devido ao fato de que empresas do setor financeiro seguem regras internacionais consolidadas para a gestão de risco, supõe-se que seus índices terão menores violações de valores de níveis de cobertura.

Neste artigo procurou-se modelar, com base na metodologia da EVT, apenas o segmento da cauda da distribuição onde se localizam as perdas extremas resultantes dos retornos dos ativos financeiros escolhidos, tais perdas superiores a um limiar de referência  $u$ . Este método é conhecido como Peaks Over Threshold (POT). A estimativa do VaR é o resultado da modelagem dessa cauda. Desta forma o objetivo é avaliar, por

<sup>5</sup> O IEE, índice de energia elétrica não atendeu à condição de seleção da nossa amostra pelo critério de valor de mercado das empresas pertencentes à carteira teórica do mesmo. Por outro lado, o índice UTIL, mistura diferentes setores de serviços de utilidade públicas e isso seria inconveniente para nosso estudo.

meio de testes estatísticos, a capacidade preditiva de dois modelos distintos de cálculo da métrica de valor em risco comumente encontrados na literatura, por meio da técnica de *backtest* realizada sobre os retornos diários dos índices setoriais da B3 e comparar o desempenho dos setores com base nos resultados das métricas de EVT e VaR.

Quanto a organização deste artigo, na seção 2 é feita uma breve revisão da literatura sobre a Teoria do Valor Extremo (EVT). Na seção 3 é apresentada a teoria do valor extremo, seus principais resultados para séries *iid* utilizando o método *peaks over threshold* e o modelo em dois estágios com filtragem inicial a partir de um modelo AR-GARCH. Na seção 4 são apresentados os índices e seus períodos em análise e algumas estatísticas descritivas dos retornos são calculadas. Já em 4.1 e 4.2 o modelo EVT condicional utilizado é revisto e seus parâmetros de análise são determinados a partir de uma amostra de trabalho (período dentro da amostra). Na seção 5, a avaliação no período fora da amostra dos modelos é realizada. Testes estatísticos para cobertura condicional e incondicional são feitos na subseção 5.1. Um comparativo entre os níveis de risco de cada um dos índices analisados é apresentado na seção 6. Ao final, elaboramos uma conclusão sobre os resultados encontrados e no Apêndice A são apresentados em maiores detalhes os modelos analisados.

## 2. Uma breve revisão sobre a Teoria do Valor Extremo

A EVT se adequa muito bem aos fatos estilizados de ativos financeiros no quesito de modelagem de perdas extremas, e em função disso vem sendo utilizada frequentemente no estudo de séries financeiras. McNeil e Frey (2000) introduziram a EVT em dois estágios para a modelagem do risco condicional. Por outro lado, Daníelsson e Morimoto (2000) criticaram os modelos condicionais de estimação do VaR propondo a utilização de uma modelagem EVT incondicional e sem o primeiro estágio de filtragem com GARCH. Byström (2004) concluiu que a combinação das abordagens da EVT, máximos em bloco e POT, com análise de séries temporais tradicional (ARIMA e GARCH) têm os melhores resultados tanto em períodos mais tranquilos como naqueles de alta volatilidade.

Em uma revisão de estudos e aplicações da EVT na área de finanças, Longin (2005) discutiu como o modelo EVT poderia contribuir com os estudos sobre gestão de risco. Utilizou para isso dados do mercado americano e concluiu que embora a distribuição dos retornos do mercado de ações seja muito volátil, a variação parece estar bem definida. Somente a distribuição *t-Studente* a classe de processos ARCH não foram rejeitadas pelos dados. Rocco (2014) conclui que esta abordagem tem um conjunto de características desejáveis, tais como: oferece recursos, com fortes fundamentos teóricos para modelar eventos extremos de risco; fornece uma variedade de ferramentas, dentre as quais destacam-se métodos não-paramétricos e processos pontuais, o que traz flexibilidade para a aplicação; o fato de que a grande maioria das séries financeiras, mesmo apresentando comportamentos muito diferente de séries com distribuição-padrão, podem ser igualmente modeladas pela EVT, o que também aumenta a flexibilidade e a precisão da modelagem; e, finalmente, a disponibilidade de abordagens paramétricas permite projeções e previsão de eventos extremos.

Outro estudo de revisão foi realizado por Kuester, Mittnik e Paoletta (2006). Os autores concluíram que os modelos de estimativa de VaR utilizados frequentemente subestimam o risco, e que o modelo condicional GARCH-EVT apresenta melhores resultados.

No setor de crédito bancário pode-se citar alguns autores que aplicaram metodologia EVT como parte de suas estimativas de risco por meio do cálculo do VaR, dentre eles destacam-se: Longin (2000), Berkowitz e O'Brien (2002), Wong, Cheng e Wong (2003), Kerkhof e Melenberg (2004). O'Brien e Szerszeń (2017). Giannopoulos e Tunaru (2005) associaram o ES com uma Simulação Histórica Filtrada (FHS) sobre os retornos diários da

Nasdaq. Por outro lado, numa abordagem aplicada em economias emergentes, Gencay e Selçuk (2004) aplicaram a EVT para estimar o VaR e realizaram teste de estresse. Os autores constataram que a EVT se torna mais precisa para quantis mais elevados. Adicionalmente, concluíram que existe diferença de volatilidade entre os retornos positivos e negativos.

Com o objetivo de investigar se existe um padrão quanto à qualidade de vários modelos e métodos na estimativa de perdas (ES), considerando classes de ativos distintas, janelas de estimativa e níveis de significância Righi e Ceretta (2015) aplicaram modelos incondicionais, comumente associados à abordagem da EVT e modelos condicionais baseados em regressão quantílica. Os autores avaliaram o desempenho dos modelos usando o *backtest* ES juntamente com um teste proposto com base na dispersão truncada pelo VaR. Um experimento de Monte Carlo indicou que o teste proposto tem mais poder do que os outros testes usuais. Os resultados empíricos enfatizam vários padrões, como certos modelos de estimativa que produzem estimativas de risco mais parcimoniosas do que os outros. Além disso, os autores verificaram que em relação ao desempenho, há predominância de modelos condicionais, principalmente aqueles que respeitam os fatos estilizados dos retornos financeiros.

Gong e Weng (2016) avaliaram o método quartílico para construir grupos de referência de ações. O teste empírico utilizou como amostra o *Shanghai Stock Exchange 50 Index*. Os autores compararam o desempenho diário de previsão de volatilidade e o desempenho fora de amostra do Valor em Risco (VaR) estimado por diferentes modelos. Como resultado empíricos mostram que o modelo quartílico tem um bom desempenho em termos de captura de dependências espaciais entre os estoques individuais e produziu previsões de VaR mais precisas do que os outros modelos comparados.

Lacay e Peffer (2017) analisaram o potencial do VaR em amplificar distúrbios de mercado com um modelo baseado em agentes em que os investidores estabelecem valores extremos de posição e devem reduzir suas posições quando o VaR de sua carteira estiver acima do limite. Para isso, elaboraram um modelo baseado em agentes, para capturar tanto o efeito que o mercado exerce sobre investidores individuais quanto o efeito global que emerge da agregação de ações individuais. Os autores concluíram que o mercado é particularmente estável quando os investidores estabelecem limites muito restritivos ou muito flexíveis para o seu nível de VaR e que a falta de políticas de gerenciamento de riscos exporia o mercado a outras fontes de instabilidade não contempladas no seu modelo, em outras palavras, uma política excessivamente restritiva restringiria significativamente a liberdade de negociação dos participantes do mercado.

Yu et al. (2018) mediram o VaR e o ES de um portfólio composto por quatro ativos de petróleo bruto, usando modelos do tipo GARCH, teoria do valor extremo (EVT) e uma seleção de métodos *vine copula* (*Mixed R-vine copula*, *R-vine* e *Gumbel/R-vine*). Os resultados do *backtesting* mostram que a combinação dos modelos EVT do tipo GARCH e dos métodos de *vine copula* (em especial o *Mixed R-vine copula*) pode produzir medidas precisas de risco do portfólio de petróleo.

Ibn Musah et al. (2018) investigaram os riscos associados à Bolsa de Valores de Gana (GSE) por meio da aplicação de técnicas de redes neurais artificiais associadas à EVT. A contribuição deste estudo consiste na determinação da significância relativa das variáveis de previsão em relação à estimativa de quando o índice do referido mercado irá subir ou cair dentro do período de negociação de cinco meses pelo uso de uma rede neural artificial (RNA). A previsão é resultado de um teste robusto realizado pelo uso do procedimento de *backtesting* para confirmar a adequação ou não do modelo EVT seguido pelas previsões da RNA.

Nguyen e Huynh (2019) implementaram vários métodos (Cópulas com variação temporal; GJG, Jagannathan e Runkle (GJR); GARCH; EVT; e VaR condicional (CVaR)) com o objetivo de simular e construir o portfólio (com mínimo risco e maior retorno

baseado no CVaR) a partir de índices de ações dos seis mercados da Associação das Nações do Sudeste Asiático (ASEAN). A amostra foi composta pelos retornos semanais dos seguintes índices: VN Index; SET Index; FTSE Straits Times Index; PSEi Index; FTSE Bursa; Malaysia KLCI Index e Jakarta SE Composite Index) no período de janeiro de 2001 a dezembro de 2017. Os autores verificaram superioridade do modelo de cópulas (GJR – GARCH – EVT – CVaR) em comparação com a abordagem normal multivariada na escolha do CVaR após avaliar os parâmetros de OTV (Over-Threshold Value), MAE (*Mean Absolute Error*) e MSE (*Mean Square Error*).

Sobreira e Louro (2020) elaboraram uma análise comparativa das previsões de diferentes metodologias, tais como, simulação histórica (HS), *RiskMetrics*, modelos GARCH com diferentes distribuições e a abordagem EVT com base na metodologia POT para estimar o VaR e o ES com dados que incluem os retornos das ações de empresas negociadas na bolsa de valores Euronext Lisboa o que garante um conjunto representativo das principais empresas do mercado de ações português. Os resultados foram medidos por meio de vários procedimentos de *backtesting* e comparados com várias funções de perda. Concluíram que a classe assimétrica GARCH associada à EVT majoritariamente teve um desempenho melhor tanto na previsão de VaR quanto de ES, principalmente para níveis de cobertura mais conservadores.

### 3. Modelando caudas e medidas de risco associadas com EVT

Considere uma amostra de uma variável aleatória -  $va$  - cujas observações sejam independentes e igualmente distribuídas - *iid*,  $X_i$ , com  $i \in \mathbb{N}$ , que representem as perdas financeiras de um determinado ativo, com uma função de distribuição - *df* - desconhecida  $F(x) = P(X_i \leq x)$ . Seja  $u$  um valor de limiar a partir do qual perdas acima deste valor sejam consideradas extremas. Os valores de excesso serão, portanto,  $X_i - u$ .

A EVT está interessada em investigar o comportamento da distribuição dos máximos desta  $va$  dados por  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  para valores de  $n$  a medida que  $n \rightarrow \infty$ . A sequência  $M_n$  é chamada de máximos em bloco e foi demonstrada por meio do conhecido teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko,<sup>6</sup> que a única distribuição para a qual  $M_n$  converge com  $n \rightarrow \infty$  é a distribuição de valores extremos generalizada - GEV. Se esta distribuição for denotada por  $H_\xi$ , com  $\xi$  um parâmetro da distribuição, então se diz que  $F \in MDA(H_\xi)$ ,  $F$  pertence ao domínio de atração máximo (MDA) de  $H_\xi$ .

**Definição 1** (GEV). Distribuição de valores extremos generalizada, é definida por sua função densidade de probabilidade - pdf - a qual é dada por:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)), & \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}), & \xi = 0 \end{cases} \quad (1)$$

o parâmetro  $\xi$  é conhecido como parâmetro de forma da distribuição e dependendo deste valor tem-se diferentes tipos de distribuição (casos particulares da GEV). Para as aplicações financeiras não necessitamos calcular qual MDA pertencem nossas distribuições contínuas, bastando saber que basicamente todas as distribuições de utilidade prática estão contidas em  $MDA(H_\xi)$  para algum valor de  $\xi$ , (MCNEIL, FREY e EMBRECHTS, 2015, p. 139).

#### 3.1. Excessos acima de um limiar

Para o método POT qualquer valor que exceda o limiar pré-determinado é considerado na distribuição dos excessos. Esta, por sua vez, é definida como:

**Definição 2** (Distribuição dos Excessos). Seja  $X$  uma variável aleatória com função

<sup>6</sup> Os três artigos que fundamentam este teorema são: Fisher e Tippett (1928), Gnedenko (1941), Gnedenko (1943).

de distribuição  $F$ . A distribuição dos excessos sobre um limiar  $u$  tem a seguinte função de distribuição:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2)$$

para  $0 \leq x < x_F - u$ , onde  $x_F \leq \infty$  é o limite direito da distribuição  $F$ .

Uma importante distribuição que surge na modelagem dos excessos sobre um limiar é a distribuição generalizada de Pareto (GPD), que pode ser definida como:

**Definição 3** (GPD). A função de distribuição de Pareto Generalizada é definida como:

$$G_{\xi, \psi}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\psi}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\psi}\right), & \xi = 0 \end{cases} \quad (3)$$

onde  $\psi > 0$ , e  $x \geq 0$  quando  $\xi \geq 0$  ou  $0 \leq x \leq -\psi / \xi$  quando  $\xi < 0$ .

Os parâmetros  $\xi$  e  $\psi$  são conhecidos respectivamente como parâmetros de forma e escala da distribuição. A GPD tem papel fundamental na teoria de valor extremo em função do teorema de Pickands-Balkema-de Haan,<sup>7</sup> onde é demonstrado que, para um valor suficientemente alto do limiar  $u$ , a distribuição dos excessos  $F_u(x)$  pode ser aproximada por uma GPD,  $G_{\xi, \psi}(x)$ .

O valor esperado de uma variável aleatória não negativa pode ser computado por meio da integral de sua cauda,  $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$ . A cauda descrita em (3) é, para  $\xi \neq 0$ ,  $(1 + \xi x / \psi)^{-1/\xi}$ .

Desta forma, o valor esperado de  $G_{\xi, \psi}(x)$ , converge para:

$$E[G_{\xi, \psi}(X)] = \frac{\psi}{1 - \xi} \quad (4)$$

desde que  $\xi < 1$ .

**Definição 4** (Função Média dos Excessos). A função média dos excessos (FME) de uma variável aleatória  $X$  com média finita é dada por:

$$e(u) = E(X - u | X > u) \quad (5)$$

Ou seja, a equação (5) representa o valor esperado da função de distribuição dos excessos dada pela Definição 2. Ela representa a média de  $F_u$  como uma função do limiar  $u$ . Por vezes também é conhecida como função média de vida residual (*mean residual life function*).

Para uma variável distribuída na forma de  $G_{\xi, \psi}(x)$ , o parâmetro de escala é uma função linear em  $u$  dado por  $\psi(u) = \psi + \xi u$ , (EMBRECHTS, KLÜPPELBERG e MIKOSCH, 1997, Teorema 3.4.13(e)). Utilizando-se deste fato e da equação (4) chega-se ao cálculo da função média dos excessos para uma GPD, dada por:

$$e(u) = \frac{\psi + \xi u}{1 - \xi} \quad (6)$$

onde  $0 \leq u < \infty$  se  $0 \leq \xi < 1$  e  $0 \leq u \leq -\psi / \xi$  se  $\xi < 0$ . É possível observar que de fato a FME é linear em  $u$ . Esta é uma característica importante de uma distribuição de Pareto generalizada e que pode ser utilizada para auxiliar a escolha de um valor adequado do limiar  $u$  de tal forma que a suposição de convergência  $F_u(x) \rightarrow G_{\xi, \psi}(x)$  seja válida.

Deseja-se o menor valor de  $u$  para o qual a relação é linear pois, mesmo o método POT implica em relevante perda de observações da série temporal, já que apenas os valores acima deste limiar são utilizados para fazer a estimação dos parâmetros  $\xi$  e  $\psi$  da GPD.

Em McNeil, Frey e Embrechts (2015, p. 161-162) é explorada, por meio de simulação de Monte Carlo, a relação entre a escolha do limiar  $u$  e o MSE do parâmetro  $\xi$  obtido

<sup>7</sup> As referências originais são: Pickands (1975) e Balkema e Haan (1974).

com a aplicação do método POT e também da própria medida de risco  $VaR_{99\%}$ . Chegam a conclusão que uma escolha de limiar tal que o número de excessos a este fique acima de 100 observações é adequado, e mais importante, a partir destas 100 observações o MSE é relativamente robusto, se elevando lentamente a partir de seu valor mínimo.

### 3.2. Estimando o VaR

Pela modelagem da cauda da distribuição  $F$  de perdas por uma GPD, é possível calcular de forma semi-paramétrica a medida de risco VaR em função dos parâmetros estimados de (3) e da distribuição empírica de  $F$ . Sob a suposição de convergência a cauda da distribuição  $F$ ,  $\bar{F}(x)$ , para  $x \geq u$  é dada por:

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &= P(X > u)P(X > x | X > u) \\ &= \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u) \\ &= \bar{F}(u)(1 + \xi(x-u)/\psi)^{-1/\xi}\end{aligned}\quad (7)$$

Nesse caso,  $x$  são os valores a serem observados das perdas, e, portanto,  $x - u$  são as perdas em excesso ao limiar. Como a equação (7) fornece a probabilidade de cauda, então esta é igual a  $1 - \alpha$ <sup>8</sup> para um valor de  $\alpha \geq 1 - \bar{F}(u)$ . O valor  $1 - \alpha$  é conhecido como a cobertura da medida de risco. Fazendo  $\bar{F}(x) = 1 - \alpha$  na equação (7) o valor de  $x$  representará  $VaR_\alpha$  e basta manipular esta equação para encontrá-lo como função de  $\bar{F}(u)$ ,  $\alpha$  e dos parâmetros  $\xi$  e  $\psi$ . O que garante o resultado abaixo:

$$VaR_\alpha = q\alpha(F) = u + \frac{\psi}{\xi} \left[ \left( \frac{1-\alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right] \quad (8)$$

Portanto, a medida de risco  $VaR_\alpha$ , para distribuições de perdas que tiveram suas caudas modeladas por meio de  $G_{\xi,\psi}$  com  $\xi < 1$  e  $\psi > 0$ , pode ser calculada utilizando-se a equação (8). A estimativa desta medida de risco será encontrada ao se estimar os parâmetros da GPD, assim como do limiar utilizado e de uma medida empírica de  $\bar{F}(u)$  que será o número de excessos verificados sobre o total de amostras. É claro que, ao se adotar esta estimativa para  $\bar{F}(u)$  se está implicitamente supondo que o número de amostras na série de perdas é significativa, assim como o número de excessos verificados. Daí a importância de se utilizar um valor  $u$  adequado, conforme explicitado na seção 3.1.

O modelo proposto por McNeil e Frey (2000) pode ser utilizado para encontrar a medida de risco  $VaR_\alpha$  condicional que se deseja, ainda dentro da metodologia POT.

### 3.3. Modelo GARCH-POT

O método POT deve ser aplicado a séries *iid* que sabidamente não é o caso de perdas de ativos financeiros. Ao se utilizar a técnica POT nos resíduos padronizados de um modelo GARCH o que se está realizando é uma pré-filtragem destas perdas, de forma a obter resíduos padronizados que sejam *iid*, e, portanto, aplicável a EVT. Primeiramente, neste artigo, diferentemente de McNeil & Frey (2000) ou Karmakar & Shukla (2014), foi estabelecido um mesmo modelo GARCH para as perdas dos ativos subjacentes. O modelo adotado foi o GARCH(1,1) e sua variância condicional é definida por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad (9)$$

onde os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são conhecidos como coeficientes arch e garch respectivamente.

<sup>8</sup> O percentil  $\alpha$  na medida VaR representa um percentual desejado de perdas que sejam menores ou iguais ao valor de VaR. Portanto, a medida de risco VaR nada mais é que um quantil alto para o qual  $\alpha\%$  das perdas devem ser menores ou iguais a este valor.

Denotando  $X_t$  como a perda observada no período  $t$ ,  $\mu_t$  e  $\sigma_t$  são respectivamente a média e o desvio-padrão condicionais, e seja  $Z_t$  inovações *iid* com média zero e desvio-padrão unitário, então tem-se que:

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (10)$$

Além do mais, quando toma-se  $F(x)$  como a distribuição marginal de  $X_t$ , então  $F_{t+1} | H_t(x)$  é a distribuição preditiva da perda para o próximo período, onde  $H_t$  é o conjunto de informações disponíveis ao fim do período  $t$ . Portanto, para o cálculo de  $VarR_\alpha$ , se deseja encontrar o  $\alpha$ -quantil que demarca a cauda superior de  $F_{t+1} | H_t(x)$ , tal que:

$$VarR_\alpha^t = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_{t+1} | H_t(x) \geq \alpha\} \quad (11)$$

Este é o preditor de  $VarR_\alpha$  calculado com informações até o período  $t$ . Este valor calculado deve ser comparado a perda realizada em  $t+1$ , para testar uma possível violação. Considerando que a distribuição de perdas é dada pela equação (9) e sabendo das propriedades de variáveis aleatórias e do operador de expectativa, a expressão de  $VarR_\alpha^t$  é descrita como:

$$VarR_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_\alpha \quad (12)$$

onde  $z_\alpha$  é o quantil  $\alpha$  das inovações  $Z_t$ .

O modelo completo para a medida condicional de risco  $VarR_\alpha^t$  dada a distribuição de perdas  $X_t$  de um ativo será, portanto:

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (13)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t \quad (14)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (15)$$

$$Z_t = D(0,1) \text{ onde } D \in MDA(H_\xi) \quad (16)$$

com a equação (12) fornecendo o valor de  $VarR_\alpha^t$ , quando utilizada em conjunto com aquela dada por (8).

Uma vez obtidos os resíduos padronizados do modelo GARCH,  $\hat{Z}_t$ , aplica-se a estes a teoria do valor extremo descrita em 3.2 para se obter o quantil de interesse  $z_\alpha$ . Para tanto, considerando a definição de uma GPD dada na equação (3) e denotando sua função densidade de probabilidades por  $g_{\xi, \psi}$ , a função logarítmica de verossimilhança, que deve ser maximizada para a obtenção dos parâmetros  $\xi$  e  $\psi$  é:

$$\begin{aligned} \ln L(\xi, \psi, Z_j^u) &= \sum_{j=1}^{N_u} \ln g_{\xi, \psi}(Z_j^u) \\ &= -N_u \ln \psi - (1 + 1/\xi) \sum_{j=1}^{N_u} \ln(1 + \xi Z_j^u / \psi) \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $N_u$  é o número de excessos acima do valor de limiar escolhido e  $Z_j^u$  são as inovações em excesso, de acordo com a EVT que exige as perdas em excesso ao limiar. O quantil obtido,  $z_\alpha$ , é aquele derivado de forma semi-paramétrica a partir da teoria EVT para os resíduos padronizados, que são tratados como realizações das inovações  $Z_t$  e portanto, ainda deve ser escalado e deslocado por meio da equação (12) para a obtenção da medida de risco de verdadeiro interesse,  $VarR_\alpha^t$ .

#### 4. Dados utilizados e estatísticas descritivas

Neste artigo serão analisadas as séries de retornos (e perdas) de seis principais índices setoriais de ações da Bovespa. Foram escolhidos os quatro maiores índices setoriais pelo critério de valor de mercado ao final de março de 2018, índices Financeiro (IFNC), Consumo (ICON), Industrial (INDX) e Materiais (IMAT), além do índice de Governança

(IGCX) e o próprio índice Bovespa (IBOV). Os retornos coletados foram entre as datas de 01/01/2009 a 31/12/2013 para o período considerado dentro da amostra, no qual são feitas algumas análises preliminares. O período fora da amostra, de onde são retirados os resultados de *backtest* se estende de 01/01/2014 a 08/05/2018. Em dias sem negociação nos mercados, os períodos iniciam-se na data útil seguinte e terminam em data útil imediatamente anterior.

A Tabela 1 apresenta algumas das estatísticas descritivas mais importantes para as séries de retornos dos ativos no período completo, dentro e fora da amostra. É possível verificar que os retornos não podem ser considerados normais, com a estatística de Jarque-Bera rejeitando a hipótese nula e com o alto grau de curtose em excesso verificado para todos os índices analisados. Também se verifica grande autocorrelação serial entre os quadrados dos retornos com a estatística  $Q^2(10)$  de Ljung-Box, uma *proxy* para a autocorrelação das variâncias, o que corrobora os fatos estilizados de séries financeiras, vide Cont (2001).

**Tabela 1. Estatísticas descritivas dos retornos**

Descritivas	IBOV	ICON	IFNC	IGCX	INDX	IMAT
Média	0,00034	0,00069	0,00066	0,00052	0,00047	0,00043
Máximo	0,06929	0,05183	0,09295	0,06188	0,06388	0,07572
Mínimo	-0,09211	-0,07446	-0,12288	-0,08837	-0,07370	-0,09079
Desvp	0,01497	0,01148	0,01640	0,01269	0,01247	0,01820
Assimetria	-0,03784	-0,11441	0,00658	-0,16642	-0,01978	0,08989
Curtose exc.	2,13179	2,23608	3,23913	3,06149	2,43070	1,37705
Jarque-Bera	439,98	488,47	1013,68	916,29	571,28	186,72
	(0,00000)	(0,00000)	(0,00000)	(0,00000)	(0,00000)	(0,00000)
$Q^2(10)$	122,14	104,32	97,44	146,68	256,11	230,39
	(0,00000)	(0,00000)	(0,00000)	(0,00000)	(0,00000)	(0,00000)
N.obs	2311	2311	2311	2311	2311	2311

Fonte: Elaboração própria a partir de dados do ECONOMATICA e B3.

Nota: Amostra completa de 02/01/2009 até 08/05/2018.

Na Figura 1 é possível visualizar a não normalidade destes retornos. Tratam-se de gráficos quantil-quantil feitos entre a amostra completa dos retornos e uma distribuição normal de referência. Para todas as séries é observado um desvio da normalidade nas caudas, configurando distribuições leptocúrticas em todos os casos.

#### 4.1. Filtro GARCH

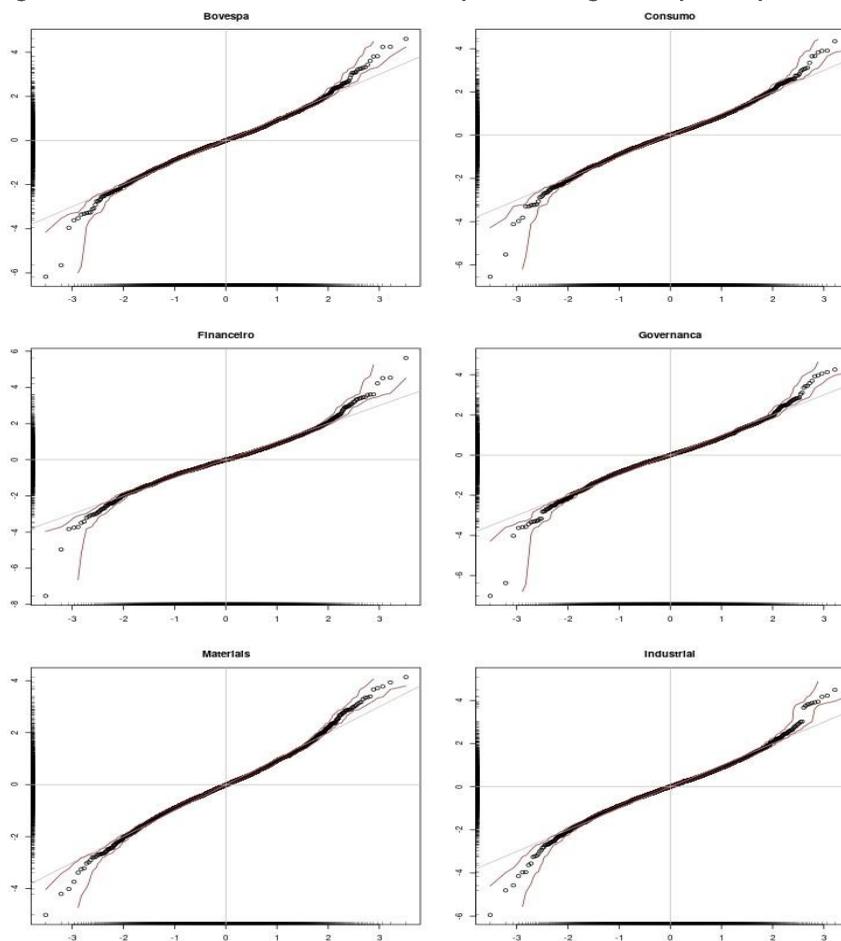
Voltando-se para o período dentro da amostra, o filtro proposto GARCH(1,1) foi aplicado nas séries de perdas e seus coeficientes estimados conforme a Tabela 2. Os valores  $p$  de cada um destes coeficientes estão apresentados entre parênteses e foram calculados com base em erros-padrão robustos, de acordo com White (1982).<sup>9</sup>

A função do modelo GARCH neste primeiro estágio é a filtragem da série de perdas, de modo que os resíduos padronizados resultantes não sejam autocorrelacionados e tampouco possuam heterocedasticidade. A Tabela 3 apresenta novamente as estatísticas Jarque-Bera e Ljung-Box ( $Q$  e  $Q^2$ ) desta vez para os resíduos padronizados resultantes da filtragem das perdas no primeiro estágio do modelo GARCH-POT. Enquanto que os resíduos padronizados, assim como as perdas (ou retornos), de fato não são normais como já se esperava, as estatísticas de autocorrelação agora estão todas em favor da

<sup>9</sup> Como era de se esperar, nem todos os coeficientes estimados são significativos ao nível de significância de 5% (alguns nem mesmo a 10%), o que não invalida o modelo.

ausência desta. Para todos os índices analisados, não é possível rejeitar  $H_0$  nos testes de autocorrelação, tanto para os resíduos como para os seus quadrados em evidente contraste com os valores apresentados na Tabela 1 quando foram analisados os retornos destes índices. Evidência que a filtragem inicial foi bem-sucedida em remover autocorrelação serial tanto das perdas quanto da variância.

Figura 1. Análise de normalidade dos retornos por meio de gráficos quantil-quantil



Fonte: Elaboração própria a partir de dados do ECONOMATICA e B3.

Sendo assim, com retornos padronizados que não são normalmente distribuídos e possuem cauda longa com excesso de curtose, mas que após filtragem não apresentam mais autocorrelação ou heterocedasticidade, pode-se passar ao segundo estágio do modelo, ou seja, aplicar a teoria do valor extremo utilizando o método *peaks over threshold* para parametrizar a cauda direita das distribuições de perdas dos ativos.

#### 4.2. Método POT

Os resíduos padronizados são tratados como as realizações do processo de inovação no modelo GARCH. Estas inovações serão analisadas sob a ótica da EVT para a obtenção dos parâmetros da GPD que definem a cauda direita de sua distribuição.

Para tanto, deve ser estabelecido um limiar  $u$  adequado para cada uma das séries,

de modo que seja satisfeito o teorema de Pickands-Balkema-de Haan. Este valor de limiar será diferente para cada série e sua escolha deve seguir os princípios delineados na seção 3.1 ao aplicar a função média dos excessos. Entretanto, considerando o *trade-off* existente entre o viés e a variância dos parâmetros da GPD estimados com relação a escolha do valor deste limiar, pode-se abordar o problema desta escolha de outra forma.

**Tabela 2. Parâmetros estimados do modelo GARCH**

Parâmetros	IBOV	ICON	IFNC	IGCX	INDX	IMAT
$\mu$	-0,00024 (0,52253)	-0,00101	-0,00069 (0,09720)	-0,00061 (0,04630)	-0,00066 (0,04057)	-0,00052 (0,27203)
$\varphi_1$	0,00320 (0,89558)	0,01723 (0,52652)	0,03415 (0,21691)	0,02786 (0,29394)	0,02146 (0,37581)	0,05601 (0,03082)
$\omega$	0,00001	0,00000 (0,68759)	0,00001	0,00000 (0,60725)	0,00000 (0,65656)	0,00001
$\alpha_1$	0,07356	0,08196	0,06498	0,09016	0,07942	0,07354
$\beta_1$	0,89605	0,89252	0,90268	0,88731	0,89702	0,89565

Fonte: Elaboração própria a partir de dados do ECONOMATICA e B3.

Notas: Valores p apresentados de acordo com erros padrão robustos e valores menores que 0,01 não são mostrados. Período dentro da amostra entre 02/01/2009 e 31/12/2013.

**Tabela 3. Estatísticas de diagnóstico para o modelo GARCH**

Estatística	IBOV	ICON	IFNC	IGCX	INDX	IMAT
Curtose exc.	1,04702	0,80399	1,07619	1,06174	0,94823	0,85436
Jarque-Bera	59,68837 (0,00000)	35,65255 (0,00000)	60,39086 (0,00000)	65,08960 (0,00000)	49,34559 (0,00000)	38,82424 (0,00000)
Q(10)	2,22678 (0,91608)	4,56100 (0,57468)	2,93792 (0,82868)	2,56408 (0,87790)	2,64320 (0,86803)	2,44096 (0,89259)
$Q^2(10)$	8,48918 (0,13786)	3,04788 (0,81307)	3,72839 (0,70876)	6,32895 (0,32562)	5,37480 (0,45069)	5,52198 (0,42978)

Fonte: Elaboração própria a partir de dados do ECONOMATICA e B3.

Nota: Período dentro da amostra entre 02/01/2009 e 31/12/2013.

Neste artigo foi utilizado o quantil empírico a 90% para a escolha do valor do limiar. Conforme visto anteriormente, um valor de limiar que resulte em um número de excessos observados a este limiar ( $N_u$ ) entre 100 e 130 parece ser o melhor limiar a ser escolhido. Ao considerar o tamanho da janela de dados dentro da amostra para os índices sob análise, este quantil resulta em quantidade adequada para o número de excessos.

A escolha do limiar por meio de um quantil empírico fixo também é mais adequada considerando-se que para a fase de *backtest* do modelo é necessário reavaliar o valor deste limiar para cada dia dentro do período fora da amostra, o que se tornaria inviável de ser feito utilizando-se a análise gráfica da função média dos excessos.

Escolhido o limiar  $u$ , obtém-se a série de inovações em excesso ao limiar  $Z_i^u : \{Z_i^u = Z_i - u \mid Z_i > u\}$ , onde  $Z_i$  são as inovações,  $Z_i^u$  são portanto, as inovações em excesso, conforme teorizado na seção 3.2. A esta série de inovações em excesso é aplicada a função log-verossimilhança dada em (16) que por sua vez é maximizada em relação aos parâmetros  $\xi$  e  $\psi$  para a obtenção de suas estimativas.

A Tabela 4 apresenta os valores estimados dos parâmetros e seus respectivos erros padrão para cada um dos índices, com a estimação feita com dados do período dentro

da amostra. Também são apresentados o número de observações dentro da amostra para o total dos resíduos padronizados, assim como o número de excessos observados ( $N_u$ ) para o limiar escolhido ( $u$ ).

Na Figura 2 é possível visualizar os gráficos de ajuste das inovações em excesso de cada um dos índices contra suas distribuições GPD de referência, ou seja, aquelas com os parâmetros de forma e escala estimados para os respectivos índices. Verifica-se que a distribuição destes excessos pouco se desvia com relação a curva de referência, denotando um bom ajuste dos dados ao modelo teórico. Em contraste, quando modeladas diretamente por meio de uma distribuição Normal, as séries de retornos afastam-se consideravelmente de suas referências como já apresentado na Figura 1. Ao se utilizar o método semi-paramétrico proposto, modelando apenas uma parte da cauda da distribuição, a parte que interessa para a modelagem de risco, obtém-se uma estimativa mais próxima da realidade que os dados apresentam.

**Tabela 4. Parâmetros estimados para o modelo EVT dos resíduos padronizados**

	IBOV	ICON	IFNC	IGCX	INDX	IMAT
N.obs.	1236	1236	1236	1236	1236	1236
Limiar $u$	1,27441	1,21387	1,24376	1,28281	1,27872	1,24701
Num.exc. $N_u$	124	124	124	124	124	124
Par. forma $\zeta$	-0,00769	-0,06855	-0,08808	0,0281	0,0682	-0,01423
Erro padrão	0,08675	0,0966	0,06545	0,1063	0,1073	0,09281
Par. escala $\psi$	0,57865	0,65301	0,64641	0,5685	0,5129	0,54368
Erro padrão	0,07225	0,08603	0,07164	0,0791	0,0717	0,07021
Quantil $z$ 0.975	2,07417	2,07937	2,08917	2,08844	2,02629	1,99505
Quantil $z$ 0.990	2,59690	2,60662	2,59265	2,63717	2,55947	2,48030

Fonte: Elaboração própria a partir de dados do ECONOMATICA e B3.

Nota: Período dentro da amostra entre 02/01/2009 e 31/12/2013.

## 5. Análise dos resultados

A avaliação dos modelos aqui referidos concentra-se em testar por meio de *backtest* o modelo EVT condicional apresentado, o qual utiliza a metodologia em dois estágios proposta por McNeil e Frey (2000) assim como o modelo proposto por RiskMetrics (1995), sendo, portanto, dois modelos testados e comparados para fins de estimação da medida de risco. As definições destes modelos e suas formas de implementação estão descritas no Apêndice A.

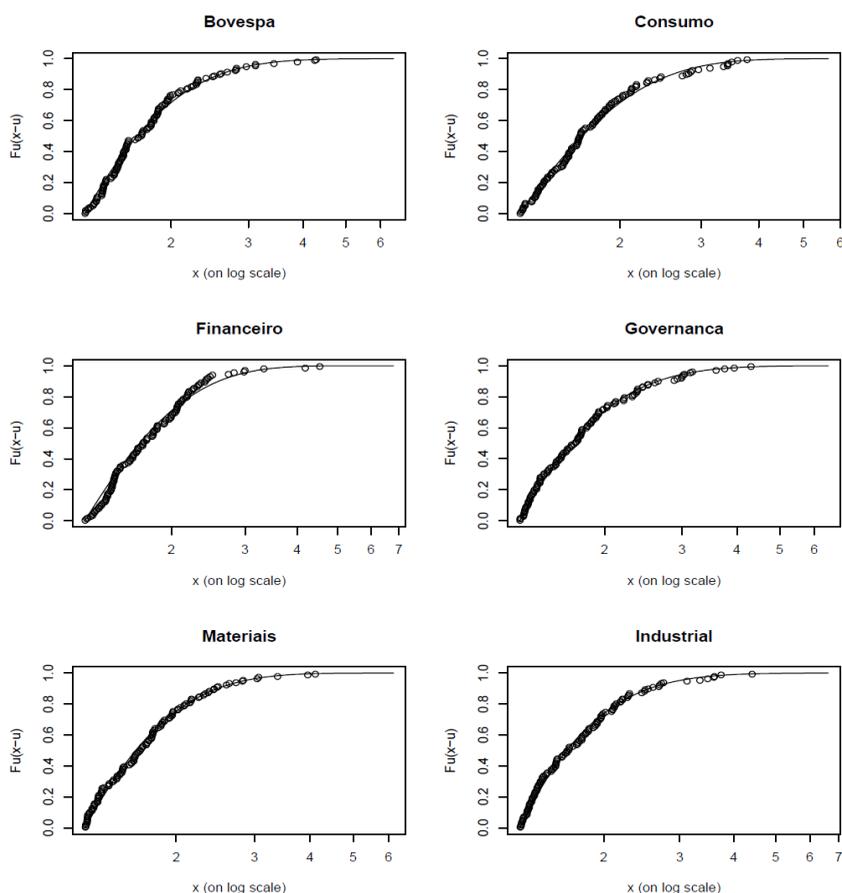
Para fazer o *backtest*, considere a série  $x_1, x_2, \dots, x_m$  com  $m \gg n$  e o conjunto de dias  $T = \{n, \dots, m - 1\}$ . Uma janela de dados de tamanho fixo contendo as últimas  $n$  observações é utilizada e para cada dia  $t \in T$  é reestimado o valor de  $VaR_\alpha^t$ . O período de teste fora da amostra é de 01/01/2015 a 08/05/2018, com dados diários de perdas para os índices sob análise. O número de observações ( $n$ ) utilizadas para fazer a estimação dos modelos a cada um dos índices é aquele apresentado na Tabela 4 (N.obs.), esse valor é fixo a cada série. Portanto, a partir do início do período de teste, esta janela de tamanho fixo avança um dia e o modelo é reestimado, e com auxílio da equação (12), resulta no valor estimado de  $VaR_\alpha^t$  ou seja, a medida de risco calculada ao final do dia  $t$  que deverá ser comparada a perda incorrida no dia,  $t + 1$ .

A Figura 3 apresenta o resultado do *backtest* para o modelo EVT condicional para cada um dos índices analisados. É possível verificar como a medida condicional de risco oscila de valor, acompanhando a volatilidade do índice, sendo especialmente reativa a

grandes choques. Em comparação com o modelo *Riskmetrics*, o EVT apresenta nível de risco estimado com maior persistência após um choque de volatilidade, ou em outras palavras, uma menor taxa de decaimento. Na Figura 4 verificar-se esta condição para o índice IBovespa onde, após a grande perda ocorrida em 18 de maio de 2017, fica evidente que o modelo retorna aos seus níveis de risco anteriores de forma mais lenta que a medida *Riskmetrics*.

Uma violação é dita ocorrida quando a perda observada é maior que a medida de risco estimada no dia anterior,  $x_{t+1} > VaR_{\alpha}^t$  para um  $\alpha$  dentro do conjunto de níveis de significância, neste artigo  $\alpha \in \{0,975; 0,990\}$ . A Tabela 5 apresenta em termos percentuais as violações ocorridas para cada um dos modelos para os níveis de cobertura dados. Dentre os dois modelos analisados, o EVT condicional se saiu melhor nos dois níveis de cobertura.

**Figura 2. Qualidade do ajuste dos dados de inovações em excesso contra uma GPD de referência**



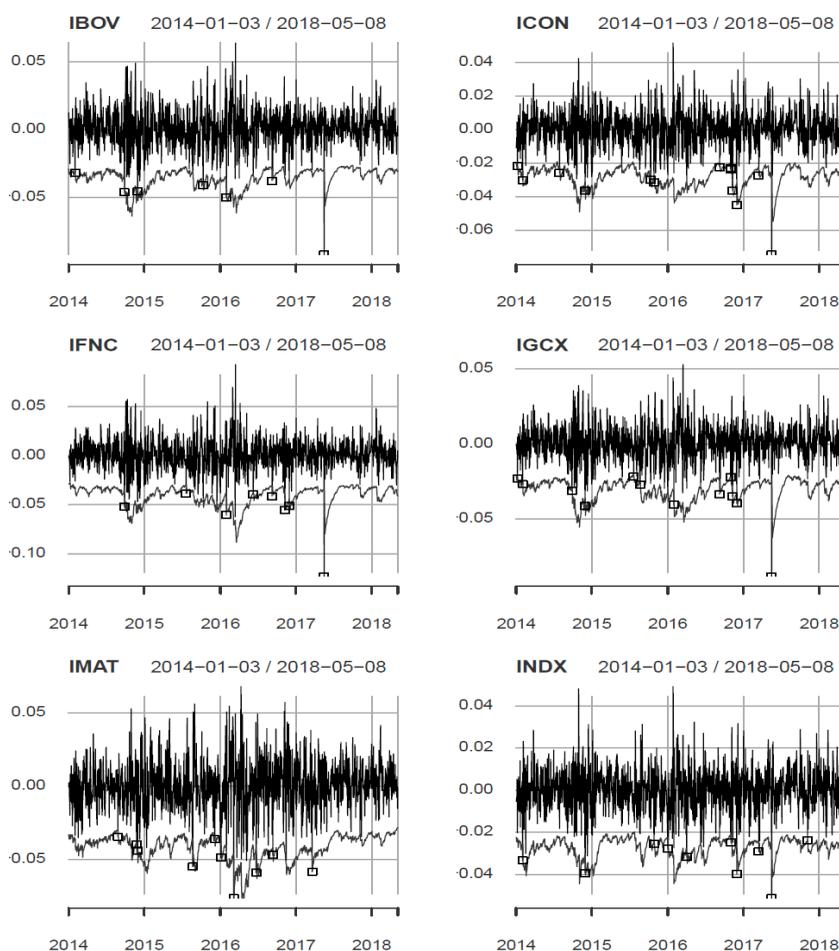
Fonte: Elaboração própria a partir de dados do ECONOMATICA e B3.

Nota: Período dentro da amostra.

Ao se observar a Tabela 5 pode-se constatar dois extremos em termos de violação da condição. O primeiro é que o setor de consumo é o mais arriscado, com 1,65% de violações condicionais, maior em comparação com os demais setores, ficando em segundo lugar, surpreendentemente, o setor de empresas com alto nível de governança corporativa (IGCX).

Os resultados financeiros das empresas ligadas ao consumo são, naturalmente, muito sensíveis às condições de renda e crédito das famílias. Tal fenômeno pode ser influenciado por diversos motivos, os quais afetam a disposição a pagar dos consumidores tais como, variações e reajustes das rendas salariais, a sazonalidade do comércio, a inadimplência dos consumidores, instabilidades naturais do câmbio, taxas de desemprego e mudanças nas taxas de juros. Por outro lado, o desempenho do IGCX aponta para uma necessidade de se investigar melhor os motivos, uma vez que a característica dessa segmentação é a promoção de um alto grau de transparência das empresas em relação aos investidores.

**Figura 3. VaR99% no modelo EVT condicional para todos os índices com violações demarcadas**



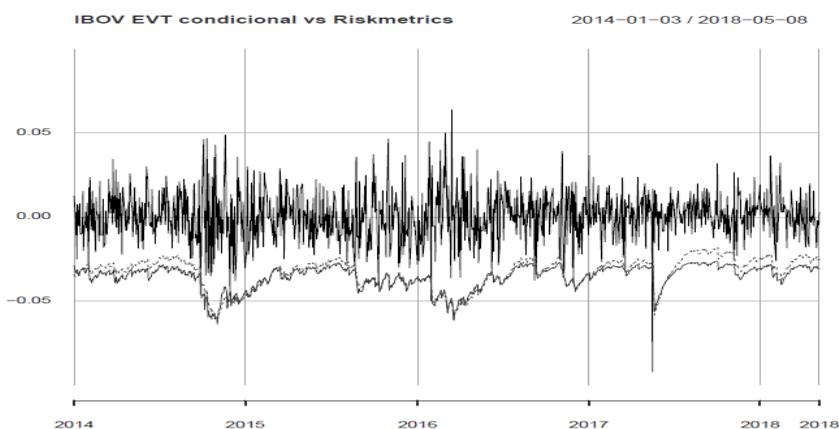
Fonte: Elaboração própria a partir de dados do ECONOMATICA e B3.

Quando elevamos o nível de cobertura para o 2,5% o setor que mais rompe o limite é o de Materiais (IMAT) o qual é composto por empresas que atuam em atividades tais como, de papel, mineração e siderurgia. Estes ramos de negócio também são muito expostos às volatilidades dos preços de *commodities* no mercado internacional e ao câmbio. Também pode-se citar as regras de comércio entre os países, as quais estão constantemente em conflito quando interesses nacionais ficam sob risco. Esse conjunto de fatores pode causar um efeito de incerteza sobre os lucros das companhias e quaisquer turbulências no mercado internacional influenciam as expectativas dos investidores. Curiosamente, quando se considera um nível de cobertura de 2,5%, o IGCX se compara

ao IFIN em percentual de violações do EVT condicional.

A segunda constatação é de que a comprovação da hipótese de que o setor financeiro apresentaria menor nível de rompimento do limite estabelecido EVT condicional. Isso pode ser explicado pela aderência das empresas do setor às regras internacionais de boas práticas bancárias e de prudência em termos de controle de risco nas tesourarias de instituições financeiras em especial nos bancos, os quais são obrigados pelo Banco Central do Brasil a seguir os parâmetros de gestão de risco e minimização de insolvência propostos nos tratados de Basileia.

**Figura 4. Teste fora da amostra para o IBOV**



Fonte: Elaboração própria a partir de dados do ECONOMATICA e B3.

Nota: O modelo EVT condicional (linha sólida) possui menor taxa de decaimento após um choque de volatilidade que o modelo Riskmetrics (linha tracejada).

**Tabela 5. Percentual de violações**

Modelo	IBOV	ICON	IFNC	IGCX	INDX	IMAT
Cobertura = 1% EVT Condicional	0,65	1,21	0,74	1,12	0,93	0,93
RiskMetrics	1,02	1,68	1,12	1,30	1,40	1,40
Cobertura = 2,5% EVT Condicional	2,14	2,61	2,14	2,14	2,42	2,70
RiskMetrics	2,42	2,79	2,14	2,61	3,54	2,61

Fonte: Elaboração própria a partir de dados do ECONOMATICA e B3.

Nota: Período fora da amostra de 02/01/2014 até 08/05/2018.

### 5.1 Testes estatísticos

Testes estatísticos podem ser realizados para verificar se o modelo para  $VaR_{\alpha}$  foi corretamente especificado levando-se em consideração o seu nível de cobertura,  $1 - \alpha$ . Este teste foi originalmente proposto por Kupiec (1995) e pretende derivar propriedades estatísticas formais do teste utilizado para verificar a precisão de modelos VaR. Este teste permite inferir se a frequência de violações ao VaR é consistente com o valor esperado destas, o nível de cobertura. Sob a hipótese nula de um modelo corretamente especificado o número de violações segue uma distribuição binomial e o teste toma a forma de razão de verossimilhança com a seguinte estatística:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left( \frac{(1-p)^{N-X} p^X}{\left(1 - \frac{X}{N}\right)^{N-X} \left(\frac{X}{N}\right)^X} \right) \quad (18)$$

onde  $p$  é o nível de cobertura,  $N$  é o número de observações do período fora da amostra e  $X$  neste caso é o número de violações ocorridas. Este teste não faz nenhum tipo de assunção e, por conseguinte, não testa a hipótese de independência entre as violações, sendo considerado um teste de cobertura incondicional para o VaR.

Um teste condicional é aquele proposto, entre outros, por Christoffersen e Pelletier (2004). A hipótese de independência entre as violações está relacionada à duração entre as observações destas. O tempo que se passa entre uma violação e outra deve ser independente e não formar agrupamentos (*clusters*). Sob a hipótese nula de um modelo corretamente especificado, a duração não deve possuir memória. Como a única distribuição contínua que não possui memória é a distribuição exponencial, os autores propuseram ajustar os dados a uma distribuição Weibull da qual a exponencial é um caso particular quando o parâmetro  $b = 1$ . O teste de duração de Christoffersen é feito sob a forma de razão de verossimilhança.

Nota-se que este teste é destinado apenas a verificação da hipótese de independência das violações. Em conjunto com o teste de Kupiec, a Tabela 6 fornece um panorama completo sobre a adequação das especificações de modelos VaR.

**Tabela 6. Testes estatísticos para VaR**

Modelo	Estatística	IBOV	ICON	IFNC	IGCX	INDX	IMAT
Cobertura 1%							
Cevt	LRuc	1,50	0,45	0,77	0,14	0,05	0,05
Cevt	Lruc p-valor						
Cevt	LRdur	3,73	1,45	0,53	0,00	2,36	0,03
Cevt	Lrdur p-valor						
riskmetrics	LRuc	0,01	4,12	0,14	0,91	1,52	1,52
riskmetrics	Lruc p-valor		(0,04)				
riskmetrics	LRdur	0,05	0,13	0,09	0,01	3,88	0,22
riskmetrics	Lrdur p-valor					(0,05)	
Cobertura 2.5%							
Cevt	LRuc	0,59	0,05	0,59	0,59	0,03	0,17
Cevt	Lruc p-valor						
Cevt	LRdur	0,30	0,02	0,94	0,37	0,83	0,99
Cevt	Lrdur p-valor						
riskmetrics	LRuc	0,03	0,37	0,59	0,05	4,22	0,05
riskmetrics	Lruc p-valor					(0,04)	
riskmetrics	LRdur	0,96	0,25	0,00	0,69	0,02	0,53
riskmetrics	Lrdur p-valor						

Fonte: Elaboração própria a partir de dados do ECONOMATICA e B3.

Notas: Teste incondicional de Kupiec, LRuc, e teste de independência por duração de Christoffersen e Pelletier, LRdur. EVT condicional (cevt) e Riskmetrics (riskmetrics). Valores p maiores que 0,05 foram omitidos. Período fora da amostra entre 02/01/2014 e 08/05/2018.

Inspecionando a Tabela 6 verifica-se como o modelo EVT condicional, especialmente

para o nível de cobertura a 1% é superior ao seu rival, prevalecendo como o único modelo a não rejeitar a hipótese nula a 95% de confiança para ambos os testes e níveis de cobertura.

A Tabela 7 apresenta um sumário contendo a quantidade de rejeições da hipótese nula para os valores de cobertura de cada um dos testes, de seis índices com dois testes, resulta em um total de doze rejeições possíveis para cada modelo. Verifica-se que, o modelo EVT condicional (*cevt*) é aquele que apresenta o menor número de rejeições.

**Tabela 7. Sumário para o número de rejeições das hipóteses nulas de um modelo corretamente especificado**

Modelo	Cobertura 1%		Cobertura 2,5%	
	LRdur	LRuc	LRdur	LRuc
<i>cevt</i>	0	0	0	0
<i>riskmetrics</i>	1	1	0	1

Fonte: Elaboração própria a partir de dados do ECONOMATICA e B3.

Notas: Nível de confiança a 95%. Período fora da amostra entre 02/01/2014 e 08/05/2018.

## 6. Conclusão

Este artigo tratou de estimar e comparar dois modelos de VaR para seis índices de ações em segmentos diferentes da B3. Os modelos EVT condicional e *Riskmetrics* foram estudados e comparados com base em dois tipos diferentes de testes. Especial ênfase foi dada ao modelo EVT condicional o qual se utiliza da teoria do valor extremo para chegar ao resultado da medida de risco. Podemos concluir que a hipótese (i) enunciada na introdução desse artigo foi comprovada, ou seja, dentre os modelos estimados, o EVT condicional apresentou os percentuais de violações mais próximos ao valor esperado, conforme visto na Tabela 5 e esse resultado vem em linha com os resultados encontrados em outras pesquisas, as quais foram descritas no referencial teórico consultado.

Ao constatar que o EVT é um modelo superior ao *Riskmetrics*, e testamos a hipótese (ii), a qual supunha que a série histórica dos retornos do setor financeiro (IFIN) apresentaria melhores resultados em relação aos limites condicionais, podemos apurar que existe diferença entre os percentuais de violação dos valores esperados pelo referido modelo (ver Tabela 5). O setor que mais rompeu o limite, em se considerando um fator de cobertura de 1%, foi o de consumo, ao passo que o que menos violou tal limite foi o setor financeiro.

O indicador IGCX, ligado às empresas com alto nível de governança corporativa apresentou resultados divergentes quando mudamos o nível de cobertura do EVT condicional de 1% para 2,5%. No primeiro caso (1% de cobertura) o IGCX foi o segundo pior nesse quesito. Porém, quando o EVT condicional é elevado para 2,5% os resultados se igualam ao IFIN.

Nos testes estatísticos de cobertura incondicional e independência, a superioridade do modelo EVT condicional se apresenta de forma mais concreta. Este modelo não apresentou rejeição a hipótese nula da correta especificação, tanto para o teste de Kupiec quanto para o teste de duração de Christoffersen e Pelletier ao nível de confiança de 95%.

Além deste *trade-off* entre superioridade teórica do modelo EVT condicional e sua implementação prática mais complexa, a medida de risco VaR atualmente está sendo utilizada em conjunto com a *Expected Shortfall*. Esta última pode ser derivada a partir do modelo EVT condicional com facilidade e deve ser abordada em outro trabalho, juntamente com testes específicos para o ES com intuito de averiguação do melhor

modelo e partir para uma comparação com índices de bolsas internacionais.

## Referências

AS 10 PRINCIPAIS BOLSAS DE VALORES DO MUNDO. Parmais, 2019. Disponível em: < <https://bit.ly/2vjUdz0>>. Acesso em: 13 de março de 2020.

AS 20 MAIORES BOLSAS DE VALORES DO MUNDO. Bússola do Investidor, 2018. Disponível em: < <https://bit.ly/2INtePE>>. Acesso em: 13 de março de 2020.

BALKEMA, A. A., & de HAAN, L. Residual Life Time at Great Age. *The Annals of Probability*, 2, 792-804, 1974.

BERKOWITZ, J., & O'BRIEN, J. How accurate are value-at-risk models at commercial banks?

BYSTRÖM, H. N. Managing extreme risks in tranquil and volatile markets using conditional extreme value theory. *International Review of Financial Analysis*, 13, 133-152, 2004.

CHRISTOFFERSEN, P., & PELLETIER, D. Backtesting value-at-risk: A duration-based approach. *Journal of Financial Econometrics*, 2, 84-108, 2004.

CONT, R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1, 223-36, 2001.

DANIÉLSSON, J., & MORIMOTO, Y. Forecasting extreme financial risk: a critical analysis of practical methods for the Japanese market. *Monetary and Economic Studies*, 2, 25-48, 2000.

DEGIANNAKIS, S., FLOROS, C., & DENT, P. Forecasting value-at-risk and expected shortfall using fractionally integrated models of conditional volatility: International evidence. *International Review of Financial Analysis*, 27, 21-33, 2013.

EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., & MIKOSCH, T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer. 1997.

FISHER, R. A., & TIPPETT, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24, 180-90, 1928.

GENCAY, R., & SELÇUK, F. Extreme value theory and value-at-risk: Relative performance in emerging markets. *International Journal of Forecasting*, 20, 287-303, 2004.

GIANNOPOULOS, Kostas; TUNARU, Radu. Coherent risk measures under filtered historical simulation. *Journal of Banking & Finance*, v. 29, n. 4, p. 979-996, 2005.

GNEDENKO, B. V. Limit theorems for the maximal term of a variational series. *Comptes Rendus (Doklady) de L'Académie des Sciences de l'URSS*, 32, 7-9, 1941.

GNEDENKO, B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, 44, 423-453, 1943.

GONG, Pu; WENG, Yingliang. Value-at-Risk forecasts by a spatiotemporal model in Chinese stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 441, p. 173-191, 2016.

IBN MUSAH, Abdul-Aziz et al. The Asymptotic Decision Scenarios of an Emerging Stock Exchange Market: Extreme Value Theory and Artificial Neural Network. *Risks*, v. 6, n. 4, p. 132, 2018.

KERKHOF, Jeroen; MELENBERG, Bertrand. Backtesting for risk-based regulatory capital. *Journal of Banking & Finance*, v. 28, n. 8, p. 1845-1865, 2004.

KUESTER, K., MITTNIK, S., & PAOLELLA, M. S. Value-at-risk prediction: A comparison of alternative strategies. *Journal of Financial Econometrics*, 4, 53-89, 2006.

KUPIEC, P. H. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The Journal of Derivatives*, 3, 73-84, 1995.

LLACAY, Bàrbara; PEFFER, Gilbert. Impact of value-at-risk models on market stability. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 82, p. 223-256, 2017.

LONGIN, F. M. From value at risk to stress testing: The extreme value approach. *Journal of Banking & Finance*, 24, 1097-130, 2000.

LONGIN, F. M. The choice of the distribution of asset returns: How extreme value theory can help?. *Journal of Banking & Finance*, v. 29, n. 4, p. 1017-1035, 2005.

MCNEIL, A. J., & FREY, R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7, 271-300, 2000.

MCNEIL, A. J., FREY, R., & EMBRECHTS, P. *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools*. (Revised ed.) Princeton University Press, 2015.

MÖGEL, B., & AUER, B. R. How accurate are modern Value-at-Risk estimators derived from extreme value theory? *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 50(4), 979-1030, 2018.

NGUYEN, Sang Phu; HUYNH, Toan Luu Duc. Portfolio optimization from a Copulas-GJR-GARCH-EVT-CVAR model: Empirical evidence from ASEAN stock indexes. *Quantitative Finance and Economics*, v. 3, n. 3, p. 562-585, 2019.

O'BRIEN, J., & SZERSZEŃ, P. J. An evaluation of bank measures for market risk before, during and after the financial crisis. *Journal of Banking & Finance*, 80, 215-34, 2017.

PICKANDS, J. Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. *Annals of Statistics*, 3, 119-31, 1975.

RISKMETRICS. Technical Document - 3rd Edition. Technical Report J.P Morgan Guaranty Trust Company, 1995.

RIGHI, Marcelo Brutti; CERETTA, Paulo Sergio. A comparison of Expected Shortfall estimation models. *Journal of Economics and Business*, v. 78, p. 14-47, 2015.

ROCCO, M. Extreme value theory in finance: a survey. *Journal of Economic Surveys*, 28, 82-108, 2014.

SHAHZAD, Syed Jawad Hussain et al. Extreme dependence and risk spillovers between oil and Islamic stock markets. *Emerging Markets Review*, v. 34, p. 42-63, 2018.

SOBREIRA, Nuno; LOURO, Rui. Evaluation of volatility models for forecasting Value-at-Risk and Expected Shortfall in the Portuguese stock market. *Finance Research Letters*, v. 32, p. 101098, 2020.

WHITE, H. Maximum likelihood estimation of misspecified models. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1-25, 1982.

WONG, M. C. S., CHENG, W. Y., & WONG, C. Y. P. Market risk management of banks: implications from the accuracy of value-at-risk forecasts. *Journal of Forecasting*, 22, 23-33, 2003.

YU, Wenhua et al. Measuring Value-at-Risk and Expected Shortfall of crude oil portfolio using extreme value theory and vine copula. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 490, p. 1423-1433, 2018.

## Apêndice A

Apêndice descrevendo os modelos de estimação da medida de risco  $VaR_{\alpha}^t$  utilizados neste artigo.

### Apêndice A.1 EVT condicional

O modelo EVT condicional (cevt) é o principal modelo analisado e descrito em detalhe na seção 3. A medida de risco é calculada diariamente utilizando-se o método POT após filtragem dos dados através de um modelo AR(1)-GARCH(1,1). As previsões de média,  $\mu_{t+1}$  e desvio-padrão condicional,  $\sigma_{t+1}$  do modelo GARCH são utilizados para calcular  $VaR_{\alpha}^t$ , conforme a equação (11). O quantil  $z_{\alpha}$  é aquele determinado pelo valor de  $\alpha$  após a aplicação do método POT para parametrização da cauda da distribuição das

inovações e é calculado de acordo com a equação (8), onde  $z_\alpha$  toma o lugar de  $VaR_\alpha$ . O algoritmo deste modelo é o seguinte:

#### A1. Filtro GARCH

1.1. Dada uma amostra de  $n$  observações  $\{t - n + 1, \dots, t\}$ , estimar um modelo AR(1)-GARCH(1,1);

1.2. salvar os valores previstos para  $\mu_{t+1}$  e  $\sigma_{t+1}$  e a série de resíduos padronizados,  $\bar{Z}$ .

#### 2. Aplicação da EVT

2.1. Aplicar a equação (8) aos resíduos padronizados salvos e obter o valor estimado de  $z_\alpha$ ;

2.2. calcular  $VaR'_\alpha$  de acordo com a equação (12),  $VaR'_\alpha = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_\alpha$ .

3. Repetir os dois passos anteriores para cada  $t \in T = \{n, \dots, m - 1\}$ .

### Apêndice A.2 Riskmetrics

O modelo *Riskmetrics* é aquele encontrado em RiskMetrics (1995), com o parâmetro  $\mu = 0$  e  $\lambda = 0,94$ , pois utiliza-se dados diários. O modelo completo para média e desvio-padrão condicionais é:

$$x_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | H_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)\varepsilon_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2 \quad (\text{A.2})$$

O algoritmo para seu cálculo, portanto, é direto.

1. Dada uma amostra de  $n$  observações  $\{t - n + 1, \dots, t\}$ , estima-se um modelo GARCH(1,1) com parâmetros fixos,  $\alpha = 0,06$  e  $\beta = 0,94$ ;

2. os valores  $\mu_{t+1} = 0$  e  $\sigma_{t+1} = \sqrt{(1 - \lambda)\varepsilon_t^2 + \lambda\sigma_t^2}$ , são salvos;

3. o valor de  $z_\alpha$  vem da normal padrão para o valor de  $\alpha$  sendo utilizado, por exemplo para  $\alpha = 99\%$ ,  $z_\alpha = 2,326$ ;

4. calcular  $VaR'_\alpha$  de acordo com a equação (12),  $VaR'_\alpha = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_\alpha$ ;

5. repetir os passos anteriores para cada  $t \in T = \{n, \dots, m - 1\}$ .